

# GIS 中投影加权 Voronoi 图及 竞争三角形生成算法研究

朱渭宁 马劲松 黄杏元 徐寿成

(南京大学城市与资源学系地理信息系统教研室, 南京 210093)

**摘要** 在 GIS 空间分析中, 为了定位和分析空间区域中含权对象的竞争区域, 提出了加权 Voronoi 图的新形式——投影加权 Voronoi 图, 该图是从常规 Voronoi 图和一般加权 Voronoi 图的平面剖分模型出发, 首先引入了能够产生空间竞争区域的空间投影剖分模型, 然后由此形成空间中的三角形空隙, 即竞争三角形, 同时归纳了形成竞争三角形的 3 种加权方式, 并分析了其生成算法和特性, 计算机的模拟结果显示, 将竞争三角形作为空间的竞争区域是可行的, 最后论述了它在 GIS 空间分析中广泛的应用前景。

**关键词** 投影加权 Voronoi 图 地理信息系统(GIS) 竞争三角形

中图法分类号: TP391.41 P208 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)03-0334-06

## Study on the Algorithm for Creating Projective Weighted Voronoi Diagrams and Competitive Triangles in GIS

ZHU Wei-ning, MA Jin-song, HUANG Xing-yuan, XU Shou-cheng

(Department of Urban & Resource Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093)

**Abstract** Different from the former focus on the neighbor region analysis of spatial objects, the purpose of the study is to locate and analyze the competitive region of weighted objects in the Euclidian  $R^2$  space. A new form of weighted Voronoi diagrams named projective weighted Voronoi diagram (PWVD) is introduced to resolve this problem. Based on the model of spatial tessellation of ordinary voronoi diagram and weighted Voronoi diagram, a projective spatial tessellate model is presented, which can produce competitive region in planar space. Thus the interspaces produced by the tessellation i. e. competitive triangles (CT), are examined. Next, three weighted methods: proportional, gravitational and Gaussian are applied to produce different CT respectively. The properties of the triangles and PWVD, such as the inclusion and overlap of CT and the intrusion, inter-intrusion and neighbor region sharing of PWVD and CT are analyzed too. At last section, the creation algorithm of CT is discussed and the result of computer simulation shows that it is feasible to use the competitive triangles as the competitive region of the Euclidian  $R^2$  space. From this study, it is concluded that the method might be widely used in future's GIS spatial analyses and practical applications.

**Keywords** PWVD(projective weighted voronoi diagrams), GIS(geographical information systems), competitive triangles(CT)

## 1 引言

近年来, 地理信息系统 (geographical information systems, GIS) 的发展带来了空间分析

能力的极大提高, 并广泛渗透到社会应用的许多领域<sup>[1~3]</sup>。众所周知, 在空间分析中, 空间对象不是孤立存在的, 每个对象都有一定的活动或影响空间, 其作用不仅局限于自身所在的位置<sup>[4,5]</sup>, 例如一个社区或一个物种的栖息地, 必然和周围同类对象间存

在既有合作也有竞争的相互作用。在 GIS 空间分析中,把这种空间区域称作对象的最邻近区域,而地理空间就被许多对象的最邻近区域所覆盖<sup>[4]</sup>。以往的空间最邻近区域分析往往只衡量和预测该区域本身的大小及动态变化,而本文的研究重点则是利用 GIS 的空间邻域分析,找出各个空间对象在空间中可能与其他对象发生竞争的区域范围。

在日常生活中,很多领域都可以运用 GIS 空间竞争分析,例如:①在竞争效率最大区域内进行连锁商场的定位;②加强旅游资源宣传,以吸引竞争区客源;③寻找行政管理薄弱的三不管地区等等。

要找到空间平面中的竞争区域,对平面进行剖分是常用的一种手段。而在 GIS 中,由于空间剖分和邻域分析的常用空间关系分析模型是 Voronoi 模型<sup>[2,4~6]</sup>,因此,可以从 Voronoi 图着手来获取竞争区域的定位。

## 2 常规加权 Voronoi 图的生成——平面剖分方法

Voronoi 图可看作是平面的一种镶嵌形式,在 2 维空间中,可依据有限个特征点生成的 Voronoi 多边形来铺满整个平面。在某种意义上,它可以看作是每一个特征点的空间影响范围,即最邻近区域。点  $p_i$  的 Voronoi 多边形的数学描述是,该多边形内部的任一点到特征点的距离都小于到其他特征点的距离,即

$$V(p_i) = \{p | d(p, p_i) \leq d(p, p_j), j \neq i, j = 1, \dots, n\} \quad (1)$$

其中,  $p_1 \dots p_n$  为 2 维笛卡尔空间  $R^2$  点集  $S$  中的有限个点,  $d(p, p_i)$  为点  $p$  到点  $p_i$  的欧氏直线距离。

图 1 所示的常规 Voronoi 图(ordinary voronoi diagram, OVD)中,每个多边形包含多边形内的空间、多边形的边(图中实线)以及各个顶点(图中空心圆)3 部分的内容。区域的边界,特别是各个区域共有的顶点,由于距离特征点相对较远,它们受到各特征点影响的程度大致相当,所以往往是引发竞争的地点,值得加以研究。

Voronoi 多边形中,因为 1 维公共边和 0 维公共顶点的面积为 0,缺乏应用价值,所以希望能够得到与之相关联的一个 2 维区域,通常得到该 2 维区域的一种方法是做缓冲区,如,以图 1 中的  $o$  点为圆心,形成点缓冲区  $R_1$ ,或沿公共边  $l$  做线状缓冲区

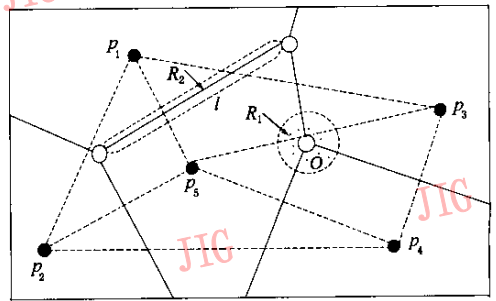


图 1 常规 Voronoi 图与点和边的缓冲区

$R_2$ ,但是,这种类型的缓冲区具有较大随意性,即形状和大小不易界定。另外,对于实际的空间点对象,其特征属性或权重往往也并不相同,而 Okabe 阐述过的加权 Voronoi 图(weighted voronoi diagram, WVD)则可以描述这类现象<sup>[6]</sup>。该加权 Voronoi 多边形为

$$V_w(p_i) = \{p | w_i + t_i d(p_i, p) \leq w_j + t_j d(p_j, p), j \neq i, j = 1, \dots, n\} \quad (2)$$

其中,  $w_i$  是点  $i$  的特征属性值,  $t_i$  是与点  $i$  距离有关的系数,例如,  $n$  个公司销售同一产品,  $w_i$  就是第  $i$  个公司的该产品价格,  $t_i$  是第  $i$  个公司每个产品单位距离销售运输成本。由此得到的加权 Voronoi 多边形就是该公司的市场范围。由式(2)可知,  $V_w(p_i)$  是一个由二次曲线围成的加权区域,下角  $w$  代表 Weighted。

WVD 是平面的完全镶嵌,没有空隙,平面中的每个点都至少在  $S$  中有一个加权距离最近的点<sup>[6,7]</sup>,但由于这不能满足在平面中寻找竞争区域的要求,因此需要通过设计新的加权模型来使 Voronoi 多边形的顶点处形成空隙区域,而这些空隙就可看作是相邻对象的竞争区域。

## 3 竞争三角形的提出——平面剖分的空间投影模型

按照点的特征属性值进行区域剖分时,本文提出了一种空间距离的投影加权方法,即空间各点在连接  $p_i, p_j$  直线上的投影满足下列的加权函数:

$$V_{PW}(p_i) = \bigcap_{p_j \in S_{neighbor}(p_i)} \{p | F(d(p_i, \hat{p}), d(\hat{p}, p_j)) \leq f(w_i, w_j) \cup d(p_i, \hat{p}) \leq 0 \cap d(\hat{p}, p_j) > 0\} \quad (3)$$

其中,  $V_{PW}(p_i)$  是与  $p_i$  点对应的投影加权(projective weighted, PW)最邻近区域。  $S_{neighbor}(p_i)$  为点集  $S$  中,由符合 OVD 特征的最邻近点  $p_j$  所组成的一个子

集,这样做可以避免 WVD 中可能出现最邻近区域不连续的情况; $\hat{p}$  是  $p$  在  $p_i, p_j$  连线上的垂直投影点,  $d(p_i, p_j)$  是点  $p_i$  和  $p_j$  之间的有向距离,取  $d(p_i, p_j)$  方向为正,  $d(p_j, p_i)$  为负;  $w_i, w_j$  分别为  $p_i, p_j$  的权重,且大于 0;  $F(d(p_i, \hat{p}), d(\hat{p}, p_j))$  为投影关系函数,简称为  $F$  函数;  $f(w_i, w_j)$  为权重关系函数,以下简称  $f$  函数。  $\cup d(p_i, \hat{p}) \leq 0$  和  $\cap d(\hat{p}, p_j) > 0$  使得权重关系只影响  $p_i, p_j$  之间的区域。

以图 2(a)为例,  $p_j$  为  $S_{\text{neighbor}}(p_i)$  中的一点,阴影部分即为  $V_{\text{PW}}(p_i)$ ,其中,直线  $l$  为  $V_{\text{PW}}(p_i), V_{\text{PW}}(p_j)$  之间的界线。  $l$  和  $l_i$  之间区域符合函数  $F(d(p_i, \hat{p}), d(\hat{p}, p_j)) \leq f(w_i, w_j)$ ,  $l_i$  以及  $l_i$  左侧的区域满足  $d(p_i, \hat{p}) \leq 0$ ,  $l_j$  左侧的区域满足  $d(\hat{p}, p_j) > 0$ 。曲线  $c$  为按照 WVD 划分的  $V_w(p_i), V_w(p_j)$  之间的界线。

采用不同的  $F$  函数和  $f$  函数,产生的空间剖分模型也不同。在此仅提出以下 3 种基本的模型:

### 3.1 比例模型

比例模型是假设点的影响力呈线性衰减,在常规 Voronoi 图中,由于所有点的属性值都相等,因此 Voronoi 多边形的边正好是 Delaunay 三角网中每条边的垂直平分线,而当点的属性值(即权重)不相等时,比例模型则按权重的正比关系剖分区域,即  $f = w_i/w_j$ 。在图 2(c)中,  $p_1, p_2$  的属性值(即权重)分别为  $w_1, w_2$ ,对于投影点  $p_A$ ,  $F$  函数有:

$$F = d(p_1, \hat{p}_A)/d(\hat{p}_A, p_2) = w_1/w_2 \quad (4)$$

### 3.2 引力模型

引力模型是设想特征点的影响力呈引力衰减,如将特征点当作同性的点电荷,则区域中各点在两个特征点连线上的投影平衡点  $\hat{p}_A$  是这样的点:在该点上的同性电荷受到这两个特征点相等的引力。如果把特征点的属性值看成是电荷数,则有

$$\frac{w_1}{[d(p_1, \hat{p}_A)]^2} = \frac{w_2}{[d(p_2, \hat{p}_A)]^2} \quad (5)$$

由式(5)可得,当  $w_1 \neq w_2$  时,  $d(p_1, \hat{p}_A)$  有如下两个解

$$d(p_1, \hat{p}_A) = \frac{d(p_1, p_2)(w_1 \pm \sqrt{w_1 w_2})}{w_1 - w_2} \quad (6)$$

但应去除一个解(即位于  $p_1 p_2$  延长线的一点),因为该点对应于非同性电荷的引力和斥力的平衡点。

可将以上两种模型综合为  $F = d(p_i, \hat{p})/d(\hat{p}, p_j)$ ,  $f(w_i, w_j) = (w_i/w_j)^k$  的形式,即点的影响力以距离的  $k$  次幂的速度变化,当  $k=1$  和  $k=1/2$  时,则分别对应于比例模型和引力模型。当  $k$  越小时,则点

的影响力衰减越快,此时,平衡点也就越容易趋向于中点,即各个特征点属性值的差异被弱化,  $k=0$  时,  $V_{\text{PW}}(p_i)$  就退化为 OVD 中的  $V(p_i)$ 。

### 3.3 高斯模型

这种模型认为,在点  $p_i, p_j$  之间存在一点(投影点)受到影响相等的概率最大。离越远,受  $p_i, p_j$  中一点的影响概率越大,而受另一点的影响概率越小。设受影响的概率分布为高斯分布,则在该模型中,可以只考虑  $p_i, p_j$  之间的区域受到各自权重的影响,并与权重成正比,则有

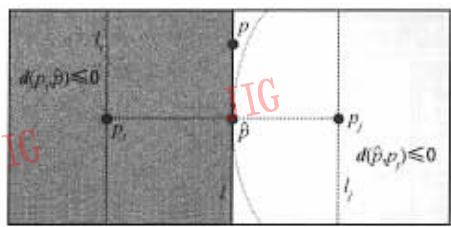
$$F = \frac{\int_{x_i}^{x_{\hat{p}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-x_i)^2}{2\sigma^2}} dt}{\int_{x_{\hat{p}}}^{x_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-x_j)^2}{2\sigma^2}} dt} \quad (7)$$

上式中,可以取  $\sigma=1$  的标准高斯分布函数,其中  $x_i, x_j, x_{\hat{p}}$  分别是  $p_i, p_j$  和  $\hat{p}$  的沿着  $p_i p_j$  方向的  $x$  坐标值。 $f$  仍然取  $w_i/w_j$ ,当  $\sigma$  增大时,表明竞争区域存在于  $p_i, p_j$  之间某一处位置的可能性越大,区域范围越明确; $\sigma$  减少时,则反之。

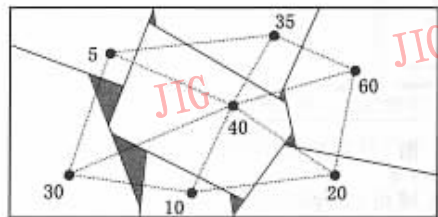
### 3.4 竞争三角形与投影加权 Voronoi 图的定义

本文将由式(3)确定的 Voronoi 图称为投影加权 Voronoi 图(projective weighted voronoi diagrams, PWVD,如图 2(b)所示)。在图 2(c)中,  $p_1, p_2, p_3$  为 3 个特征点,其属性值分别为  $w_1, w_2, w_3$ 。在确定竞争区域时,只要根据权重大小按一种分配模型,即  $f(w_i, w_j)$  重新划定每个特征点的最邻近区域,即  $p_1$  点对应于四边形  $p_{11} p_7 p_4 p_5$ ,  $p_2$  点对应于四边形  $p_{13} p_7 p_8 p_9$ ,  $p_3$  点对应于五边形  $p_{12} p_5 p_6 p_{10} p_9$ ,这样,3 条边界线相交后就形成了一个三角形区域  $p_{11} p_{12} p_{13}$ ,有理由认为这个区域就是  $p_1, p_2, p_3$  3 个点的合作或竞争区域,因为它不在任何一个附近特征点的最邻近区域中,所以可把每 3 个特征点产生的三角形称为竞争三角形(competitive triangle, CT),即图 2(b)中的阴影部分。由  $p_1, p_2, p_3$  3 个特征点组成的三角形称作生成三角形(original triangle, OT),它也就是与  $S_{\text{neighbor}}$  对应的 Delaunay 三角网中的每一个三角形。

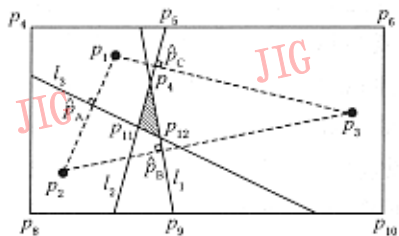
PWVD 与 WVD 的区别在于, PWVD 中不存在开放和封闭的区域,且每个特征点的最邻近区域仍然是一个凸集。在 WVD 中,权重较大点的部分区域在 PWVD 中被划分给较小权重的点,这样做的理由是基于一种距离心理效应,如图 2(a)中,对于权重较大的对象  $p_i$ ,垂直投影线  $l$  与二次曲线  $c$  之间的区域虽然按 WVD 的权重关系应属于  $p_i$ ,但由于距



(a) 投影加权区域



(b) 投影加权 Voronoi 图



(c) 竞争三角形区域

图 2 投影加权 Voronoi 图的原理

$p_i$  的实际欧氏距离较远, 容易被  $p_i$  忽视, 因此可以将该区域划分给实际距离较近, 也就是权重较小的对象  $p_j$ 。

例如, 设  $p_1, p_2, p_3$  是 3 个旅游点, 其特征属性值为各自的旅游综合吸引力。如果  $p_3$  的吸引力越大, 其影响范围也就越广, 则它与  $p_1, p_2$  的分界线也就越偏向  $p_1, p_2$  一侧。在竞争三角形  $p_{11}p_{12}p_{13}$  中的游客, 如果以  $l_1$  为界, 则应前往  $p_2$  点; 若以  $l_2$  为界, 应前往  $p_3$  点; 若以  $l_3$  为界, 应前往  $p_1$  点; 所以, 该三角区域的游客去 3 个旅游点的趋势是基本相同的, 而对于每个旅游点而言, 这个区域就是客源的主要竞争区。

### 3.5 竞争三角形的特征

在 PWVD 中, 可以证明, CT 和一个点的最邻近区域有以下的特征与分布情况:

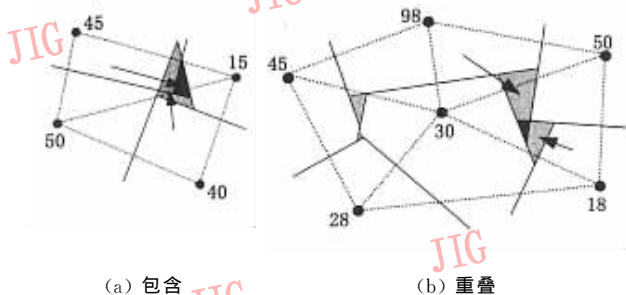
- (1) 每个 CT 都与其 OT 相似。
- (2) CT (含退化的点) 的数目等于 Delaunay 三角网中三角形的数目。

(3) 对于给定位置, 且不共线的 3 个点, CT 仍然可能会退化成一点, 即权重的分配使得 CT 的面

积等于 0。

(4) 投影距离采用比例模型划分时, 由几何学中的 Ceva 定理<sup>[8]</sup>可知, 3 条 Ceva 线共点, 即图 2(c) 中, 直线  $p_1\hat{p}_B, p_2\hat{p}_C, p_3\hat{p}_A$  交于一点。

(5) 当点集  $S$  中的点的数目大于 3 时, CT 之间有可能出现包含与重叠的现象(如图 3 所示)。



(a) 包含

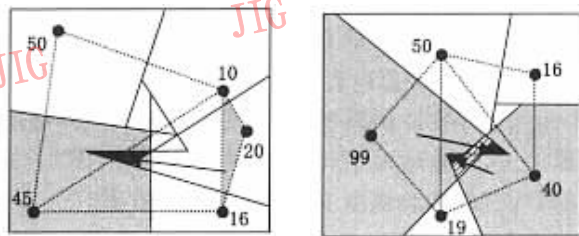
(b) 重叠

图 3 竞争三角形的包含与重叠

CT 的重叠或包含是由一种可称为“夹击”的权重关系造成的。若点集  $S_{neighbor}(p_i)$  中的连续 3 点(按  $S_{neighbor}(p_i)$  中各点与  $p_i$  连线斜率的大小排序)的中间一点权重较小, 而两侧点的权重较大时, 则易出现 CT 的包含(如图 3(a) 所示); 而一侧点的权重较大, 另一侧较小时, 则易出现 CT 的重叠(如图 3(b) 所示)。

### (6) CT 的侵入、互侵与邻域共用

与 CT 之间的包含与重叠不同, CT 的侵入、互侵与邻域共用是针对 CT 与  $V_{PW}(p_i)$  的关系的。当 CT 间的包含和重叠进一步发生变化时, 则常会出现 CT 的侵入、互侵, 甚至  $V_{PW}(p_i)$  的共用现象。这里侵入是指由某个 OT 形成的 CT 与  $S$  集中非 OT 的点的  $V_{PW}(p_i)$  部分或全部重叠(如图 4(a) 所示); 互侵是指两个相邻的 OT 的 CT 与对方中某一点(往往是非公共边上的两点)的  $V_{PW}(p_i)$  发生部分或全部重叠(如图 4(b) 所示);  $V_{PW}(p_i)$  的共用是指当上述两个 CT 互侵过深时, 则会造成各自 OT 中的某一点的  $V_{PW}(p_i)$  与对方发生重叠, 见图 4(b) 中的斜



(a) 侵入

(b) 互侵与邻域共用

图 4 竞争三角形的侵入、互侵与邻域共用

线阴影部分。

本节仅给出了PWVD中CT、OT、 $V_{PW}(p_i)$ 的特征及其之间关系的简要概述,其具体的证明和定量描述较为复杂,这里暂不展开讨论。

## 4 投影加权 Voronoi 图的生成算法

Voronoi 图的生成算法多样,但针对PWVD,笔者采用的是利用Delaunay三角网的逐点插入法。其中,CT的定义如下:

```
class CTriangle //一个CT
{
    Point p1, p2, p3; //CT的3个顶点
    PTriangle PTri; //对应的OT
    //((其顶点为含权的Point点))
}
```

CT以及 $V_{PW}(p_i)$ 生成的主要步骤如下:

(1) 计算每插入一点VP的最邻近点列表VPList1。

(2) 由VPList1生成Delaunay三角网。

算法 运用以Delaunay三角网中的对角线交换法则为基础的循环删除法。

(3) 根据VPList1计算插入点竞争三角形列表CTriList。

算法 以VP所在的Delaunay三角形为OT,根据投影剖分模型作OT三边的投影线。3条线的交点就是CT的3个顶点。

(4) 计算 $V_{PW}(p_i)$ 的顶点列表VPList2。

算法 根据投影剖分模型,作邻近点与插入点连线的一条垂直投影线,而相邻两条投影线的交点就是VPList2中的一个顶点。

(5) 根据CTriList和VPList2绘制与插入点相关的若干CT及其 $V_{PW}(p_i)$ 。

(6) 由于VP的插入,还需要更新VPList1中各点的最邻近节点的列表、 $V_{PW}(p_i)$ 顶点列表以及CT列表。

(7) 将新插入点的CTriList中的各个三角形存入PWVD的CT总列表。

由于PWVD的算法基本建立在OVD算法的基础之上,只是增加了计算剖分线的部分,因此,良好的OVD算法将提高PWVD算法的效率。

笔者在计算机上用Visual C++实现了CTPWVD图的生成(如图5所示),事实上,如果将每个特征点看作带有不同质子数的原子核,那么图中

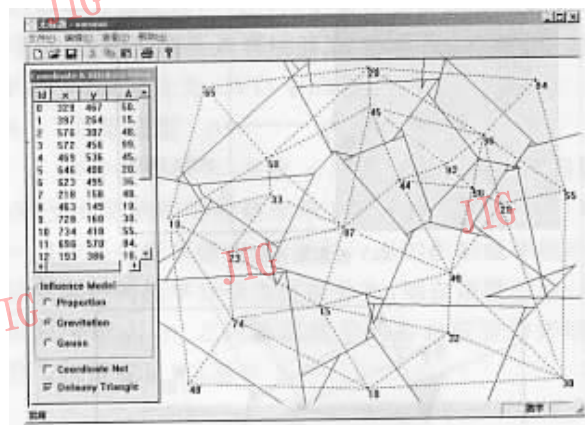


图5 基于引力剖分模型的PWVD图

的CT区域可以近似地看成是价电子的成键区域,对于这些区域中的电子,由于附近的原子核都无法将其俘获,因此成为共用的电子,对应到地理分析中来,这些区域实际上也就是特征点的竞争区域。

GIS空间竞争分析有许多潜在而广泛的应用,如:在竞争效率最大区域内进行连锁商场的定位;加强旅游资源宣传,以吸引竞争区客源;寻找行政管理薄弱的三不管地区;研究生物物种栖息地或个体领地的分布;确认流行性传染病的易感地区和社区间犯罪事件的多发区等等。也可以进行空间竞争的逆向分析,即如果确定了竞争区域,那么就可以根据其位置和分布来反推影响它的空间对象的位置和权重,这也有很大的应用前景。

## 参考文献

- Goodchild Michael F. The current status of GIS and spatial analysis[J]. Journal of Geographical Systems, 2000, (2): 5~10.
- 黄杏元,马劲松,汤勤. 地理信息系统概论(修订版)[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- 王劲峰,柏延臣,朱彩英,等. 地理信息系统空间分析能力探讨[J]. 中国图象图形学报, 2001, 6A(9): 849~853.
- Halls P J, Bulling M, White P C L, et al. Dirichlet neighbors: revisiting Dirichlet tessellation for neighborhood analysis[J]. Computers, Environment and Urban Systems, 2001, 25(1): 105~117.
- Gold Christopher M. A review of potential applications of Voronoi methods in geomatics[A]. In: Proceedings, Canadian Conference on GIS[C], Ottawa, Canada, ON, 1994: 1647~1656.
- Okabe Atsuyuki, Boots Barry, Sugihara Kokochi. Nearest neighborhood operations with generalized Voronoi diagrams: a review[J]. International Journal of Geographical Information Systems, 1994, 8(1): 43~71.
- Boots B N. Weighted Thiessen polygons [J]. Economic

Geography, 1980, 56(3):248~259.

- 8 Coxeter H S M, Greitzer S L. 几何学的新探索[M]. 陈维恒译. 北京:北京大学出版社, 1986.



朱渭宁 1973 年生,1995 年毕业于南京大学信息物理系,现为南京大学地图学与地理信息系统专业硕士研究生。研究方向为 GIS 空间分析和地理空间数据模型。



马劲松 1969 年生,南京大学城市与资源学系副教授,2000 年获得南京大学自然地理学博士学位。主要从事 GIS 教学和基础理论科研工作。



黄杏元 1938 年生,南京大学城市资源学系教授,1959 年毕业于南京大学地理系地图学专业。主要从事 GIS 的教学和科研工作。著有多本教材和专著,发表论文 70 余篇,获多项国家级教学成果奖和部委级科技进步奖。



徐寿成 1956 年生,南京大学城市与资源学系高工,1978 年毕业于南京航空航天大学。主要从事 GIS 教学和应用开发天空工作。